WPISUJE ZDAJĄCY

KOD ZDAJĄCEGO

symbol klasy | symbol zdającego

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ

MATEMATYKA – POZIOM ROZSZERZONY

STYCZEŃ 2024

Czas pracy: 180 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

WYPEŁNIA NAUCZYCIEL NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci właściwy arkusz egzaminacyjny, tj. arkusz z właściwego przedmiotu na właściwym poziomie.
2. Jeżeli przekazano Ci niewłaściwy arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
3. Jeżeli przekazano Ci właściwy arkusz – zapoznaj się z poniższą instrukcją.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś nauczycielowi nadzorującemu egzamin.
2. Na tej stronie wpisz swój kod.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla sprawdzającego. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Zadanie 1. (0–3)

Dane są liczby $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 64}$ oraz $b = \log_2 3 \cdot \log_3 4$.

1.
0–1–2–3

Oblicz a^b.

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 \leqslant 1$, prawdziwa jest nierówność $y \leqslant x^2 + 1$.

2.
0–1–2–3

Zadanie 3. (0–3)

Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 4$. Przez punkt $P = (0, m)$ poprowadzono dwie styczne do tej paraboli.

3.
0–1–2–3

Wyznacz wartości parametru m, dla których poprowadzone styczne są prostopadłe. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

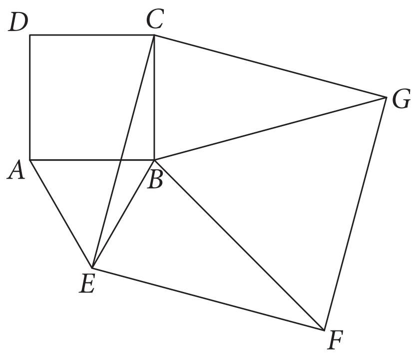
Liczba q jest ilorazem rosnącego ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Wyrazy: pierwszy, drugi i trzeci ciągu (a_n) są odpowiednio pierwszym, czwartym i trzynastym wyrazem ciągu arytmetycznego (b_n).

4.
0–1–2–3

Oblicz iloraz q ciągu geometrycznego (a_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–3)

Na zewnątrz kwadratu $ABCD$, na boku AB, zbudowano trójkąt równoboczny ABE. Następnie utworzono taki kwadrat $CEFG$, że punkt B leży wewnątrz niego (jak na rysunku).



5.
0–1–2–3

Udowodnij, że trójkąt BFG jest równoboczny.

6.
0–1–2–3–4

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\frac{\sin(2x)}{2} = \sin^2 x - \sin x$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

Okrąg o równaniu $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ jest wpisany w trójkąt ABC o wierzchołkach $A=(a,0)$, $B=(0,b)$ i $C=(0,0)$. Pole trójkąta ABC jest równe 150.

7.
0–1–2–3–4

Oblicz a i b. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Przekątne równoległoboku, który nie jest prostokątem, przecinają się pod kątem α, a ich długości są liczbami naturalnymi p i q. Pole tego równoległoboku jest trzy razy mniejsze od pola równoległoboku, którego przekątne również przecinają się pod katem α i mają długości równe odpowiednio $p + 2$ i $q + 2$.

8.
0–1–2–3–4

Oblicz p i q. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–4)

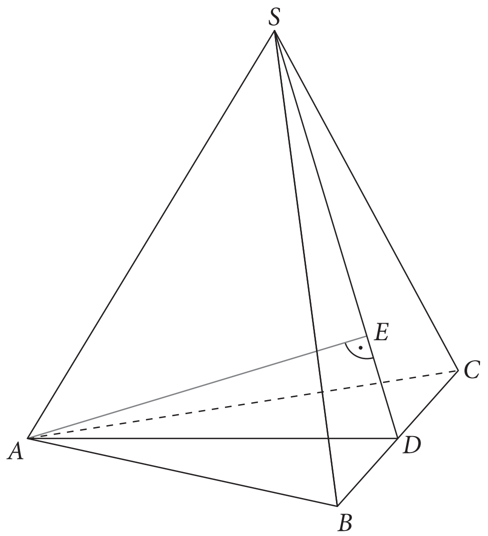
Ze zbioru wszystkich liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste, losujemy jedną liczbę. Wylosowanie każdej z tych liczb jest jednakowo prawdopodobne.

9.
0–1–2–3–4

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowano liczbę, w której suma wszystkich cyfr jest równa 3. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCS$, którego podstawą jest trójkąt ABC o boku długości 6. Punkt D jest środkiem krawędzi BC. Wysokość AE tego ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka A dzieli odcinek SD tak, że $|SE|:|DE| = 3:1$ (jak na rysunku).



10.
0–1–2–3–4

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCS$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–5)

Dane jest równanie

$$(x+3)(x^2+m^2-2m-8)=0$$

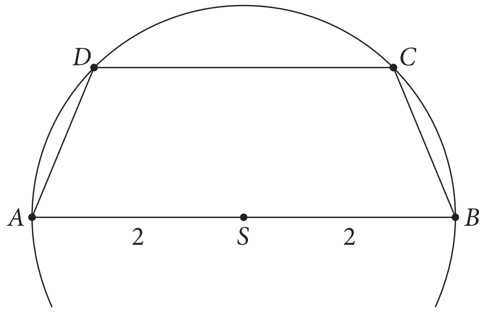
z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

11.
0–1–2–3–4–5

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, które tworzą ciąg arytmetyczny. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 2 oraz punkty A, B, które są końcami średnicy tego okręgu. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$ o podstawie AB, wpisane w ten okrąg.



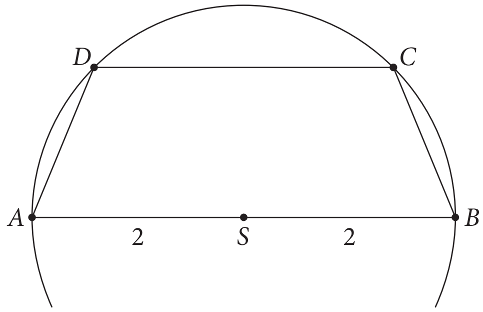
12.1.
0–1–2–3–4

Zadanie 12.1. (0–4)

Oblicz długość ramienia tego spośród rozpatrywanych trapezów, w który można wpisać okrąg.

Zadanie 12.2. (0–6)

Niech x oznacza długość podstawy CD trapezu $ABCD$.



12.2.
0–1–2–3–4–5–6

a) Wykaż, że pole P trapezu $ABCD$, jako funkcja zmiennej x, jest określone wzorem $P(x) = \frac{1}{4}\sqrt{256 + 128x - 8x^3 - x^4}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P zmiennej x.

c) Wyznacz tę wartość x, dla której funkcja P osiąga wartość największą.

Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)